数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 94-106

Quantum twist maps and dual canonical bases

東京大学大学院数理科学研究科 大矢 浩徳 *
Hironori Oya
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

In this report, we explain our results on the compatibility between quantum twist maps and dual canonical bases. The quantum twist maps that we deal with are introduced by Lenagan-Yakimov [LeY], and they are algebra anti-automorphisms on quantized enveloping algebras. We show that they induce bijections between dual canonical bases if we regard them as anti-isomorphisms between quantum nilpotent subalgebras. As a corollary, we show certain symmetries of the entries of transition matrices between dual Poincaré-Birkhoff-Witt type bases and dual canonical bases. This report is based on joint work with Yoshiyuki Kimura.

本稿では "量子捻り写像"(quantum twist map) と呼ばれる写像と双対標準基底に関連して得られた結果を報告する. 量子捻り写像は Lenagan-Yakimov[LeY] によって導入された量子包絡環の反代数自己同型である. 主結果の一つは量子捻り写像が, 量子冪零部分代数間の反代数同型と見た場合に双対標準基底を双対標準基底に移すということである. また, その系として, 双対標準基底を双対 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底で展開した際の展開係数のある対称性が得られることを述べる. 本研究は木村嘉之氏との共同研究である.

1 導入: 捻り写像 (twist map)

本稿では捻り写像の q-類似を扱う. ここでは導入として q-類似を考える前に, 通常の捻り写像について説明する. 次の設定を考える.

Notation 1.1. 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$, およびそのその三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ を固定する. さらに, $\{E_i, F_i, H_i \mid i \in I := \{1, \dots, r\}\}$ を Chevalley 生成元とし, $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を Cartan 行列とする. つまり, $\mathfrak{g}$

$$\{E_i, F_i, H_i \mid i \in I\}$$

で生成され, 以下の関係式をみたす (実際には関係式はこれらで尽くされる);

(i) $[H_i, H_j] = 0$,
(ii) $[H_i, E_j] = a_{ij}E_j$, $[H_i, F_j] = -a_{ij}F_j$,
(iii) $[E_i, F_j] = \delta_{ij}H_i$,
(iv) $(\mathrm{ad}\, X_i)^{1-a_{ij}}(X_j) = 0$ $(i \neq j, X = E, F)$, ここで, $\mathrm{ad}\, X_i(Y) := [X_i, Y]$ とする.

次に G を $\mathfrak{g}$ を Lie 環に持つ連結単連結複素代数群, N_-, H, N_+ をそれぞれ $\mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}^+$ を Lie 環に持つ G の閉部分群とする. このとき, $B_- := N_-H$, $B_+ := HN_+$ は Borel 部分群と呼ばれる. さらに $x_i(t) = \exp(tE_i)$, $y_i(t) = \exp(tF_i)$ をそれぞれ, E_i, F_i に対応する G の 1-パラメータ部分群とする. Weyl 群を $W := N_G(H)/H$, その単位元を e, 単純鏡映を $\{s_i \mid i \in I\}$ と書く. 各 $w \in W$ に対し, $\ell(w)$ を w の長さと

* E-mail address:oya@ms.u-tokyo.ac.jp

し, w の最短表示の集合を $I(w) := \{(i_1, \dots, i_{\ell(w)}) \in I^{\ell(w)} \mid w = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(w)}}\}$ とする. さらに, 各 $i \in I$ に対し, $\overline{s}_i := x_i(-1)y_i(1)x_i(-1)$ とし, 各 $w \in W$ に対しては $\overline{w} := \overline{s}_{i_1} \cdots \overline{s}_{i_\ell}$ とする. ここで, $(i_1, \dots, i_\ell) \in I(w)$ であり, この元は最短表示の取り方によらない. また $\overline{w}^{-1} \neq \overline{w^{-1}}$ であることに注意する.

各 $i \in I$ に対し, $\varpi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg.grp.}}(H, \mathbb{C}^\times)$ を $i \in I$ に対応する基本整ウェイトとする. また $G_0 := N_- H N_+$ とし, $g \in G_0$ に対して $g = [g]_-[g]_0[g]_+$ を対応する (唯一の) 分解とする.

Definition 1.2. 各 $i \in I$ に対し, $\Delta_{\varpi_i, \varpi_i}$ を G 上の正則関数で G_0 上

$$\Delta_{\varpi_i, \varpi_i}(g) := \varpi_i([g]_0)$$

として定まるものとする. さらに, 各 $w_1, w_2 \in W$ に対し G 上の正則関数 $\Delta_{w_1\varpi_i, w_2\varpi_i}$ を

$$\Delta_{w_1\varpi_i, w_2\varpi_i}(g) = \Delta_{\varpi_i, \varpi_i}(\overline{w_1}^{-1} g \overline{w_2})$$

によって定める. これらの関数は一般化小行列式と呼ばれる. 実際に, A_r 型の場合にはこれらは (ϖ_j なら $j \times j$ 型の) 小行列式に対応する.

Remark 1.3. 以降本節では記号が煩雑になることを避けるために Fomin-Zelevinsky[FZ] の結果の特別な (しかし 2 節以降の導入としては十分な) 場合を解説する. 度々 $(e, w) \in W \times W$ という形の添え字が現れるが Fomin-Zelevinsky[FZ] は一般の $(w_1, w_2) \in W \times W$ の場合に対応する対象を扱い, 同様の結果を得ている. 以下に現れる [FZ] から引用した主張は元の論文では全て一般化した形で書かれている.

各 $w \in W$ に対し, $G^{e,w} := B_+ \cap B_- \overline{w} B_-$ とする. これは (e, w) に対応する二重 Bruhat 胞体と呼ばれる. (なお, ここでは $\overline{w}$ を取ったがこれは w の代表元の取り方にはよらないことが容易に確かめられる.) 最短表示 $\boldsymbol{i} := (i_1, \dots, i_\ell) \in I(w)$ をとる. ここで, 以下の写像を考える:

$$x_{\boldsymbol{i}} \colon H \times (\mathbb{C}^\times)^\ell \to G^{e,w}, (a; t_1, \dots, t_\ell) \mapsto a x_{i_1}(t_1) \cdots x_{i_\ell}(t_\ell).$$

このとき, $x_{\boldsymbol{i}}$ は双有理写像である [FZ, Theorem 1.2]. ここで次の問題を考える.

Question 1.4 (分解問題 (Factorization problem)). $x_{\boldsymbol{i}}$ の逆有理写像 $x_{\boldsymbol{i}}^{-1}$ を具体的に記述せよ.

この問題に対し, Fomin-Zelevinsky は [FZ] において捻り写像を用いて解を与えた. 彼らの導入した捻り写像, および分解問題の解決は以下の通りである.

Definition 1.5 (捻り写像 (twist map)[FZ, 1.5]). 捻り写像 $\zeta^{e,w} \colon G^{e,w} \to G^{e,w^{-1}}$ を以下で定める:

$$\zeta^{e,w}(x) := \left([x]_-^{-1} x \overline{w^{-1}} [x \overline{w^{-1}}]_+^{-1}\right)^\vee .$$

ここで $(-)^\vee$ は以下から定まる G の対合である:

$$a^\vee = a^{-1} \ (a \in H),\ x_i(t)^\vee = y_i(t),\ y_i(t)^\vee = x_i(t).$$

これは well-defined な双正則写像となる. さらに, $(\zeta^{e,w})^{-1} = \zeta^{e,w^{-1}}$ である [FZ, Theorem 1.6].

Theorem 1.6 ([FZ, Theorem 1.9]). 最短表示 $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_\ell) \in I(w)$ を取り, 各 $j \in I = \{1, \dots, r\}$ に対し $i_{\ell+j} := j$ とする. さらに, 各 $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $j \in I$ に対して, $k^+(j) := \min\{k' \in \{1, \dots, \ell + r\} \mid k' > k, i_{k'} = j\}$ とする. また, $k \in \{1, \dots, \ell\}$ に対して, $w_{<k} := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}$ とし, $j \in I$ に対して, $w_{<\ell+j} := w$ とする. このとき, $x = x_{\boldsymbol{i}}(a; t_1, \dots, t_\ell)$ に対して,

$$a = [\zeta^{e,w}(x)\overline{w}]_0^{-1}$$

であり，さらに $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対し，

$$t_k = \frac{\prod_{j \in I \setminus \{i_k\}} \Delta_{\varpi_j, w_{<k}\varpi_j}(\zeta^{e,w}(x))^{-a_{j,i_k}} \prod_{j \in I} \Delta_{\varpi_j, w\varpi_j}(\zeta^{e,w}(x))^{a_{j,i_k}}}{\Delta_{\varpi_{i_k}, w_{<k}\varpi_{i_k}}(\zeta^{e,w}(x)) \Delta_{\varpi_{i_k}, w_{<(k+1)}\varpi_{i_k}}(\zeta^{e,w}(x))}$$

である．

このように，分解問題の解決においては捻り写像が用いられる．特に上の等式の右辺においては一般化小行列式を捻り写像で引き戻したものに x を代入しているという見方をすると，"捻った一般化小行列式" によって逆有理写像が記述されると言える．

Definition 1.7 (y-座標)**.** 各 $w \in W$ に対し，$N_-(w) := N_- \cap \overline{w} N_+ \overline{w}^{-1}$ とする．このとき

$$\begin{array}{ccc} G^{e,w} & \to & H \times (N_-(w^{-1}) \cap \overline{w}^{-1} G_0) \\ \uplus & & \uplus \\ g & \longmapsto & ([g]_0, \overline{w}^{-1}[g\overline{w}^{-1}]_+ \overline{w}). \end{array}$$

は双正則写像である [FZ, Proposition 2.14]．この対応から $G^{e,w}$ の元を $H \times (N_-(w^{-1}) \cap \overline{w}^{-1} G_0)$ の元によって定めることができる．これより後者の表示を $G^{e,w}$ の y-座標と呼ぶ．

ここで，y-座標を用いて捻り写像を $(y_0, y_-) \mapsto (y_0', y_-')$ と表すと $y_-' = \overline{w}(y_-^{\vee})^{-1}\overline{w}^{-1} =: \tau_w(y_-)$ となる [FZ, Proposition 3.4]．ここで τ_w は $\tau_w \colon N_-(w^{-1}) \to N_-(w)$ を定めるので，その座標環の間の射 $\tau_w^* \colon \mathbb{C}[N_-(w)] \to \mathbb{C}[N_-(w^{-1})]$ を定める．2 節以降で扱う量子捻り写像はこの射の q-類似である．例えば τ_w^* は以下の性質を持つ (Theorem 1.6 の証明の一部にも用いられる)．

Proposition 1.8 ([FZ, Lemma 2.25])**.** *Weyl* 群の元 $w_1, w_2, w \in W$ を取り，w_1，w_2 は弱右 *Bruhat* 順序で w より小さいとする (弱右 *Bruhat* 順序の定義については *Proposition 3.6* を参照のこと)．このとき各 $i \in I$ に対し，

$$\tau_w^*(\Delta_{w_1\varpi_i, w_2\varpi_i}) = \Delta_{w^{-1}w_2\varpi_i, w^{-1}w_1\varpi_i}.$$

以下に述べる Theorem 3.7 はこの q-類似である．さらに，一般化小行列式は双対標準基底と呼ばれる基底の元の中で特別なものである．Theorem 3.4 では量子捻り写像は双対標準基底を双対標準基底に移すことを述べる．

2 q-類似

2.1 量子包絡環

量子包絡環は普遍包絡環 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の q-類似と考えられる代数である．(以下では 1 節と重複する記号もあるが量子包絡環の文脈での意味を明確にするため再定義する．)

Definition 2.1. 対称化可能 Kac-Moody Lie 環を定める以下のデータ (ルートデータ) を固定する．

- I : 有限添字集合，
- $\mathfrak{h}$: 有限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間，
- $P \subset \mathfrak{h}^*$: $\mathbb{Z}$-格子 (ウェイト格子)，
- $P^* = \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle h, P\rangle \subset \mathbb{Z}\}$: 余ウェイト格子．$\langle -, - \rangle : P^* \otimes_{\mathbb{Z}} P \to \mathbb{Z}$ 標準的なペアリング，
- $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset P$: 単純ルート，
- $\{h_i\}_{i \in I} \subset P^*$: 単純余ルート，
- $(-,-) : P \times P \to \mathbb{Q}$: 対称 $\mathbb{Z}$-双線型形式．

さらに上のデータは以下の条件を満たす:

(a) 各 $i \in I$ に対し, $(\alpha_i, \alpha_i) \in 2\mathbb{Z}_{>0}$,
(b) 各 $\lambda \in P$, $i \in I$ に対し, $\langle h_i, \lambda \rangle = 2(\alpha_i, \lambda) / (\alpha_i, \alpha_i)$,
(c) $A = (\langle h_i, \alpha_j \rangle)_{i,j \in I}$ は対称化可能一般化 Cartan 行列, すなわち,
  - 各 $i \in I$ に対し, $\langle h_i, \alpha_i \rangle = 2$,
  - 各 $i \neq j$ に対し, $\langle h_i, \alpha_j \rangle \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$,
  - $\langle h_i, \alpha_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle h_j, \alpha_i \rangle = 0$,

(d) $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{h}^*$ は一次独立.

ウェイト格子 P(resp. 余ウェイト格子 P^*) の部分加群 $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$(resp. $Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}h_i$) はルート格子 (resp. 余ルート格子) と呼ばれる. ルート格子の元 $\beta = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i$ に対し, その高さを $\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} m_i \in \mathbb{Z}$ で定める. $P_+ := \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in I\}$ とすると, P_+ の元は支配的整ウェイトと呼ばれる. 以下で各 $i \in I$ に対し, ϖ_i と書くと $\langle h_j, \varpi_i \rangle = \delta_{ij}$ を満たす P の元を表すこととする (この元の存在は仮定しなくてもよい). また $s_i : P \to P$ を $s_i(\lambda) = \lambda - \langle h_i, \lambda \rangle \alpha_i$ と定め, Weyl 群 W を $\{s_i \mid i \in I\}$ らの生成する $\mathrm{Aut}(P)$ の部分群とする. 各 $w \in W$ に対し $\ell(w)$, $I(w)$ は 1 節と同様に定める.

Notation 2.2. 以下では q を不定元とする. さらに, 以下のように記号を定義する:

$$\text{各 } i \in I \text{ に対し}, q_i := q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}},$$
$$\text{各 } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し}, [n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \ [n]! := [n][n-1]\cdots[1], \ [0]! := 1.$$

各 $i \in I$ と有理関数 $R \in \mathbb{Q}(q)$ に対し, R_i を q に q_i を代入して得られる有理関数とする.

Remark 2.3. 以下の量子包絡環 $\mathbf{U}_q$ は本稿の元の論文である [KiO] と余積の取り方を変えている. (代数としては同じものである.) また, 以下で定義する $\mathbf{U}_q^-(w)$ は [KiO] の記号では $*(\mathbf{U}_q^-(w))$ に対応し, 本稿 3 節で定義する Θ_w は $* \circ \Theta_w \circ *$ に対応する. これらの変更に付随して記号の意味が変わっている箇所があるので注意する. この変更により, 例えば冪単量子小行列式は 1 節と同様最高ウェイト加群に対応するものを考えることになる [KiO, Proposition 3.14].

Definition 2.4. ルートデータに付随する量子包絡環 $\mathbf{U}_q (:= \mathbf{U}_q(\mathfrak{g}))$ とは生成元を,

$$e_i, f_i \ (i \in I), \ q^h \ (h \in P^*),$$

とし, 以下の関係式で定まる $\mathbb{Q}(q)$-代数である:

(i) $q^0 = 1, \ q^h q^{h'} = q^{h+h'} \ (h, h' \in P^*)$,
(ii) $q^h e_i = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i q^h, \ q^h f_i = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i q^h, \ (h \in P^*, \ i \in I)$,
(iii) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \dfrac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \ (i, j \in I), \ t_i := q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2} h_i}$,
(iv) $\sum_{k=0}^{1-\langle h_i, \alpha_j \rangle} (-1)^k x_i^{(k)} x_j x_i^{(1-\langle h_i, \alpha_j \rangle - k)} = 0 \ (i \neq j, \ x = e, f)$, ここで, $x_i^{(n)} := x_i^n / [n]_i!$ とする.

量子包絡環 $\mathbf{U}_q$ は, $\{e_i \mid i \in I\}$ らで生成される部分代数を $\mathbf{U}_q^+$, $\{f_i \mid i \in I\}$ らで生成される部分代数を $\mathbf{U}_q^-$, $\{q^h \mid h \in P^*\}$ らで生成される部分代数を $\mathbf{U}_q^0$ とすると, Lie 環の普遍包絡環と同様に,

$$\mathbf{U}_q^- \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbf{U}_q^0 \otimes_{\mathbb{Q}(q)} \mathbf{U}_q^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{U}_q, \ a \otimes b \otimes c \mapsto abc$$

で定まる三角分解を持つ．さらに $\mathbf{U}_q$ は以下で定まる Hopf 代数構造を持つ．

$$\begin{aligned} &\Delta(e_i)=e_i\otimes 1+t_i\otimes e_i, && S(e_i)=-t_i^{-1}e_i, && \varepsilon(e_i)=0,\\ &\Delta(f_i)=f_i\otimes t_i^{-1}+1\otimes f_i, && S(f_i)=-f_it_i, && \varepsilon(f_i)=0,\\ &\Delta(q^h)=q^h\otimes q^h, && S(q^h)=q^{-h}, && \varepsilon(q^h)=1. \end{aligned}$$

各 $\beta\in Q$, $\sharp\in\{\emptyset,+,-\}$ に対し，

$$(\mathbf{U}_q^\sharp)_\beta:=\{x\in\mathbf{U}_q^\sharp\mid \text{任意の } h\in P^* \text{に対し}, q^hxq^{-h}=q^{\langle h,\beta\rangle}x\}$$

と定め，この形の部分空間に属する元を斉次元と呼ぶ．また，$x\in(\mathbf{U}_q)_\beta$ に対し，$\mathrm{wt}\,x:=\beta$ と定める．

Definition 2.5. $\mathbb{Q}(q)$-代数対合 $\vee\colon\mathbf{U}_q\to\mathbf{U}_q$ を以下で定める：

$$e_i^\vee=f_i,\qquad f_i^\vee=e_i,\qquad (q^h)^\vee=q^{-h}.$$

$\mathbb{Q}$-代数対合 $\overline{(\cdot)}\colon\mathbb{Q}(q)\to\mathbb{Q}(q)$, $\overline{(\cdot)}\colon\mathbf{U}_q\to\mathbf{U}_q$ を以下で定める：

$$\overline{q}=q^{-1},\qquad \overline{e_i}=e_i,\qquad \overline{f_i}=f_i,\qquad \overline{q^h}=q^{-h}.$$

$\mathbb{Q}(q)$-反代数対合 $*\colon\mathbf{U}_q\to\mathbf{U}_q$, $\varphi\colon\mathbf{U}_q\to\mathbf{U}_q$ を以下で定める：

$$\begin{aligned} &*(e_i)=e_i, && *(f_i)=f_i, && *(q^h)=q^{-h},\\ &\varphi(e_i)=f_i, && \varphi(f_i)=e_i, && \varphi(q^h)=q^h. \end{aligned}$$

Definition 2.6. 各 $i\in I$ に対し $\mathbb{Q}(q)$-線型写像 e_i', ${}_ie'\colon\mathbf{U}_q^-\to\mathbf{U}_q^-$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} &e_i'(xy)=e_i'(x)\,y+q_i^{\langle h_i,\mathrm{wt}\,x\rangle}xe_i'(y), && e_i'(f_j)=\delta_{ij},\\ &{}_ie'(xy)=q_i^{\langle h_i,\mathrm{wt}\,y\rangle}{}_ie'(x)\,y+x\,{}_ie'(y), && {}_ie'(f_j)=\delta_{ij} \end{aligned}$$

ここで，$x,y\in\mathbf{U}_q^-$ は斉次元とした．このとき以下を満たす対称双線型形式 $(\ ,\ )_L\colon\mathbf{U}_q^-\times\mathbf{U}_q^-\to\mathbb{Q}(q)$ が定義される．

$$(1,1)_L=1,\qquad (f_ix,y)_L=\frac{1}{1-q_i^2}(x,e_i'(y))_L,\qquad (xf_i,y)_L=\frac{1}{1-q_i^2}(x,{}_ie'(y))_L.$$

この双線型形式 $(\ ,\ )_L$ は非退化である．詳細は [L4, Chapter 1] を参照．

Definition 2.7 (双対 $\overline{(\cdot)}$ 対合)**.** 任意の元 $x\in\mathbf{U}_q^-$ に対し，$\sigma(x)=\sigma_L(x)\in\mathbf{U}_q^-$ を以下の性質により定義する；

$$\text{任意の } y\in\mathbf{U}_q^- \text{に対し}, (\sigma(x),y)_L=\overline{(x,\overline{y})_L}.$$

双線型形式 $(\ ,\ )_L$ は非退化なので $\sigma(x)$ はただ一つに定まる．写像 $\sigma\colon\mathbf{U}_q^-\to\mathbf{U}_q^-$ は双対 $\overline{(\cdot)}$ 対合と呼ばれる．双対 $\overline{(\cdot)}$-対合は $\mathbb{Q}$-線型形式であり，$\sigma^2=\mathrm{id}$ である．

2.2 量子冪零部分代数

Definition 2.8 (組紐群作用 T_i). 各 $i \in I$ に対し, 以下で定まる $\mathbb{Q}(q)$-代数同型 $T_i \colon \mathbf{U}_q \to \mathbf{U}_q$ が存在する [L4, Section 37.1.3]:

$$T_i\left(q^h\right) = q^{h-\langle h,\alpha_i\rangle h_i},$$
$$T_i\left(e_j\right) = \begin{cases} -t_i^{-1} f_i & j = i \text{ のとき}, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{-r} e_i^{(r)} e_j e_i^{(s)} & j \neq i \text{ のとき}, \end{cases}$$
$$T_i\left(f_j\right) = \begin{cases} -e_i t_i & j = i \text{ のとき}, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{r} f_i^{(s)} f_j f_i^{(r)} & j \neq i \text{ のとき}. \end{cases}$$

また逆写像は以下で与えられる:

$$T_i^{-1}\left(q^h\right) = q^{h-\langle h,\alpha_i\rangle h_i},$$
$$T_i^{-1}\left(e_j\right) = \begin{cases} -f_i t_i & j = i \text{ のとき}, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{-r} e_i^{(s)} e_j e_i^{(r)} & j \neq i \text{ のとき}, \end{cases}$$
$$T_i^{-1}\left(f_j\right) = \begin{cases} -t_i^{-1} e_i & j = i \text{ のとき}, \\ \displaystyle\sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r q_i^{r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} & j \neq i \text{ のとき}. \end{cases}$$

(T_i, T_i^{-1} は Lusztig[L4] の $T'_{i,-1}$, $T''_{i,1}$ にそれぞれ相当する.)

代数同型ら $\{T_i\}_{i\in I}$ は組み紐関係式を満たす. これより $w \in W$ に対し, 合成 $T_w := T_{i_1} \cdots T_{i_\ell} \colon \mathbf{U}_q \to \mathbf{U}_q$ は最短表示 $(i_1, \dots, i_\ell) \in I(w)$ の取り方に依らず定まる [L4, Chapter 39].

以下は $\mathbf{U}_q$ の生成元に対して容易に確かめられる.

Lemma 2.9. 各 $i \in I$ に対し, $T_i \circ S \circ \vee = S \circ \vee \circ T_i^{-1}$.

Definition 2.10 (量子冪零部分代数). 各 $w \in W$ に対し,

$$\mathbf{U}_q^-(w) = \mathbf{U}_q^- \cap T_w\left(\mathbf{U}_q^+ \mathbf{U}_q^0\right)$$

と定める. これは, $\mathbf{U}_q^-$ の部分代数であり量子冪零部分代数と呼ばれる.

Definition 2.11 (Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底). Weyl 群の元 $w \in W$ の最短表示 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I(w)$ をとる. このとき各 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$ に対し,

$$F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) := \left(T_{i_1} \cdots T_{i_{\ell-1}}\right)(f_{i_\ell}^{(c_\ell)}) \cdots T_{i_1}(f_{i_2}^{(c_2)}) f_{i_1}^{(c_1)},$$
$$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) := F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) / \left(F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}), F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})\right)_L,$$

と定める. これらの元に対して以下が知られている [BCP, Proposition 2.3] [L4, Proposition 38.2.3].

(1) 各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell$ に対し, $F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \in \mathbf{U}_q^-(w)$.

(2) $\{F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \mid \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell\}$ は $\mathbf{U}_q^-(w)$ の基底をなす.

(3) $\{F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \mid \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\ell\}$ は $\mathbf{U}_q^-(w)$ 上の双線型形式 $(\ ,\ )_L$ に関して直交基底である. さらに,

$$\left(F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}), F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i})\right)_L = \delta_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}'} \prod_{k=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{c_k} (1 - q_{i_k}^{2j})^{-1}.$$

これより $\{F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{i})\}_{\boldsymbol{c}}$ は Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底と呼ばれ, $\{F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{i})\}_{\boldsymbol{c}}$ は双対 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底と呼ばれる.

2.3 双対標準基底

標準基底 (下側大域基底) は Lusztig [L1, L2, L4], Kashiwara[Ka1] により独立の方法で導入された $\mathbf{U}_q^-$ の基底である. (同じ基底であることが後に示された.) ここでは Kashiwara の方法により, 標準基底を導入する. 詳細は例えば [Ka1, Ka3] を参照のこと.

Definition 2.12 (標準基底, 双対標準基底). $\mathcal{A}_0$ を $\mathbb{Q}(q)$ の元のうち $q=0$ で極を持たないもののなす部分環とする. 各 $i \in I$ に対し, $\mathbf{U}_q^- = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_i^{(k)} \operatorname{Ker} e_i'$ [Ka1, 3.5] となる. これより $\mathbb{Q}(q)$-線型写像 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-$ が以下で定義される: 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $u_k \in \operatorname{Ker} e_i'$(有限個を除いて 0) とすると,

$$\tilde{e}_i\left(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_i^{(k)}u_k\right) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} f_i^{(k-1)}u_k, \qquad \tilde{f}_i\left(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_i^{(k)}u_k\right) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_i^{(k+1)}u_k.$$

ここで,

$$\mathscr{L}(\infty) := \sum_{l\geq 0, i_1,\dots,i_l\in I} \mathcal{A}_0\tilde{f}_{i_1}\cdots\tilde{f}_{i_l}1 \subset \mathbf{U}_q^-,$$
$$\mathscr{B}(\infty) := \{\tilde{f}_{i_1}\cdots\tilde{f}_{i_l}1 \bmod qL(\infty) \mid l\geq 0, i_1,\dots,i_l \in I\} \subset L(\infty)/qL(\infty)$$

とおくとこれらは以下を満たす [Ka1, Theorem 4]:

(i) $\mathscr{L}(\infty)$ は自由 $\mathcal{A}_0$ 加群で $\mathbb{Q}(q)\otimes_{\mathcal{A}_0}\mathscr{L}(\infty) \simeq \mathbf{U}_q^-$,
(ii) 集合 $\mathscr{B}(\infty)$ は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$ の基底である,
(iii) 各 $i\in I$ に対し, $\tilde{e}_i\mathscr{L}(\infty)\subset\mathscr{L}(\infty)$, $\tilde{f}_i\mathscr{L}(\infty)\subset\mathscr{L}(\infty)$,
(iv) 各 $i\in I$ に対し, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ は写像 $\mathscr{B}(\infty)\to\mathscr{B}(\infty)\coprod\{0\}$ を誘導する (再び $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ と書く),
(v) $\tilde{e}_ib\in\mathscr{B}(\infty)$ を満たす $b\in\mathscr{B}(\infty)$ に対し, $b=\tilde{f}_i\tilde{e}_ib$.

この対 $(\mathscr{L}(\infty),\mathscr{B}(\infty))$ は $\mathbf{U}_q^-$ の (下側) 結晶基底と呼ばれる. また $i\in I$ に対し写像 $\varepsilon_i,\varphi_i\colon\mathscr{B}(\infty)\to\mathbb{Z}$ が

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_i^kb\in\mathscr{B}(\infty)\},\ \varphi_i(b) := \varepsilon_i(b)+\langle h_i,\operatorname{wt} b\rangle,$$

で定められる. ここで, $b\in\mathscr{B}(\infty)\cap(\mathscr{L}(\infty)\cap(\mathbf{U}_q)_\beta)/q(\mathscr{L}(\infty)\cap(\mathbf{U}_q)_\beta)$ に対して, $\operatorname{wt} b:=\beta$. また, $*$ は $\mathscr{L}(\infty)$, $\mathscr{B}(\infty)$ を保つことが知られている [Ka1, Proposition 5.2.4] [Ka2, Theorem 2.1.1]. これにより各 $i\in I$ に対し,

$$\tilde{e}_i^* := *\circ\tilde{e}_i\circ *,\ \tilde{f}_i^* := *\circ\tilde{f}_i\circ *,\ \varepsilon_i^* := \varepsilon_i\circ *,\ \varphi_i^* := \varphi_i\circ *$$

が定義される. 次に, 量子包絡環 $\mathbf{U}_q^-$ の $\{f_i^{(n)} \mid i\in I, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ によって生成される $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]$-部分代数を $\mathbf{U}_{q,\mathbb{Q}[q^{\pm1}]}^-$ とする. このとき, 自然に定まる射影

$$E := \mathscr{L}(\infty)\cap\overline{\mathscr{L}(\infty)}\cap\mathbf{U}_{q,\mathbb{Q}[q^{\pm1}]}^- \to \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)$$

は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型である [Ka1, Theorem 6]. これより, $G^{\mathrm{low}}\colon\mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty)\to E$ をこの逆写像とすると, $\mathbf{B}^{\mathrm{low}} = \{G^{\mathrm{low}}(b)\mid b\in\mathscr{B}(\infty)\}$ は $\mathbf{U}_{q,\mathbb{Q}[q^{\pm1}]}^-$ の $\mathbb{Q}[q^{\pm1}]$-基底であり, 標準基底 (下側大域基底) と呼ばれる. (これは $\mathscr{L}(\infty)$ の $\mathcal{A}_0$-基底でもある.) 標準基底は以下の性質を持つ [Ka1, Lemma 7.3.4].

$$\text{各 } b\in\mathscr{B}(\infty) \text{ に対し, } \overline{G^{\mathrm{low}}(b)} = G^{\mathrm{low}}(b).$$

次に, 双対標準基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を $(\ ,\ )_L$ に関する $\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ の双対基底として定義する. すなわち, $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} = \{G^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathscr{B}(\infty)\}$ を

$$(G^{\mathrm{low}}(b), G^{\mathrm{up}}(b'))_L = \delta_{b,b'}$$

により定義する. 標準基底の元の $\overline{(\cdot)}$-対合不変性により, 双対標準基底の元は双対 $\overline{(\cdot)}$-対合不変である. すなわち,

$$各\ b \in \mathscr{B}(\infty)\ に対し,\ \sigma(G^{\mathrm{up}}(b)) = G^{\mathrm{up}}(b).$$

Proposition 2.13 ([Ki1, Theorem 4.18, Theorem 4.25, Theorem 4.29]). *Weyl* 群の元 $w \in W$ とその最短表示 $\boldsymbol{i} \in I(w)$ を固定する.

(1) 各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}$ に対し, $F^{\mathrm{low}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \equiv F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \in \mathscr{B}(\infty)$. これより対応する $\mathscr{B}(\infty)$ の元を $b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})$ と書く.

(2) 各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}$ に対し,

$$G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})) = F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) + \sum_{\boldsymbol{c}' < \boldsymbol{c}} d^{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}'} F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i})\ \ (d^{\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}'} \in q\mathbb{Z}[q]).$$

ここで $<$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}$ 上の左辞書式順序, すなわち,

$(c_1, \ldots, c_{\ell(w)}) < (c'_1, \ldots, c'_{\ell(w)}) \Leftrightarrow$ ある $1 \leq k \leq \ell(w)$ が存在して, $c_1 = c'_1, \ldots, c_{k-1} = c'_{k-1}, c_k < c'_k$

で定まる順序である.

(3) $\mathbf{U}_q^-(w) \cap \mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ は $\{G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})) \in \mathbf{B}^{\mathrm{up}} \mid \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}\}$ であり, $\mathbf{U}_q^-(w)$ の基底をなす.

Remark 2.14. 双対標準基底の元 $G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}))$ は Proposition 2.13 (2) の性質と σ-不変性によって特徴づけられる. さらに, この特徴づけのためには Proposition 2.13 (2) の性質は

$$G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})) - F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) \in \sum_{\boldsymbol{c}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}} q\mathbb{Z}[q] F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i})$$

に取り換えてもよい.

Example 2.15. 各 $k = 1, \ldots, \ell(w)$ に対し, $\boldsymbol{c}_k := (0, \ldots, 0, \overset{\overset{k}{\vee}}{1}, 0, \ldots, 0)$ とおく. このとき $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, $G^{\mathrm{up}}(b(m\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{i})) = F^{\mathrm{up}}(m\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{i})$ となる.

Remark 2.16. Proposition 2.13 (2) の性質は以下の性質と同値である:

$$F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) = \textstyle\sum_{\boldsymbol{c}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}} [F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) : G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i}))]\, G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i})),$$

$$[F^{\mathrm{up}}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}) : G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i}))] \begin{cases} \in \delta_{\boldsymbol{c}',\boldsymbol{c}} + q\mathbb{Z}[q] & \boldsymbol{c}' \leq \boldsymbol{c}\ のとき, \\ = 0 & その他の場合. \end{cases}$$

また, 実際には以下の結果 (Corollary 3.5) により $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}$ 上の順序を右辞書式順序 $\prec$, すなわち

$(c_1, \ldots, c_{\ell(w)}) \prec (c'_1, \ldots, c'_{\ell(w)}) \Leftrightarrow$ ある $1 \leq k \leq \ell(w)$ が存在して, $c_{\ell(w)} = c'_{\ell(w)}, \ldots, c_{k+1} = c'_{k+1}, c_k < c'_k$

で定まる順序に取り換えても同じ結果が成り立つことがわかる.

Remark 2.17. $\mathbf{U}_q^{-,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} := \left\{ x \in \mathbf{U}_q^- \mid \left(x, \mathbf{U}^-_{q,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} \right)_L \in \mathbb{Q}[q^{\pm 1}] \right\} = \sum_{b \in \mathscr{B}(\infty)} \mathbb{Q}[q^{\pm 1}] G^{\mathrm{up}}(b)$ とおく. このとき, $\mathbf{U}_q^{-,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]}$ は $\mathbf{U}_q^-$ の部分代数である. $\mathbb{C}$ を $q \mapsto 1$ により $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]$ 加群と見ると以下の "$q \to 1$" の特殊化を考えることができる.

$$\mathbf{U}_q^- \begin{array}{l} \supset\ \mathbf{U}^-_{q,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} \xrightarrow[\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} -]{\text{“}q \to 1\text{”}} \mathbf{U}(\mathfrak{n}^-) \\ \supset\ \mathbf{U}_q^{-,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} \xrightarrow[\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]} -]{\text{“}q \to 1\text{”}} (\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-))^*_{\mathrm{gr}} \simeq \mathbb{C}[N_-]. \end{array}$$

ここで, $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ は $\mathfrak{n}^-$ の普遍包絡環, $(\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-))^*_{\mathrm{gr}} := \bigoplus_{\alpha\in\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((\mathbf{U}_q^-)_\alpha, \mathbb{C})$ であり, $(\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-))^*_{\mathrm{gr}}$ には $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ の余代数構造の双対として定まる代数構造を考える. さらに,

$$\mathbf{U}_q^{-,\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]}(w) := \sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell(w)}} \mathbb{Q}[q^{\pm 1}]G^{\mathrm{up}}(b(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i})) \xrightarrow[\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}-]{``q\to 1"} {}^{N_-\cap\overline{w}N_-\overline{w}^{-1}}\mathbb{C}[N_-] \simeq \mathbb{C}[N_-(w)].$$

となるので, $\mathbf{U}_q^-(w)$ は (双対標準基底を考えれば) 関数環 $\mathbb{C}[N_-(w)]$ の q-類似とも考えられる.

2.4 量子小行列式

各 $\lambda \in P_+$ に対し, $V(\lambda)$ を λ を最高ウェイトに持つ既約最高ウェイト $\mathbf{U}_q$-加群とする. さらに, その最高ウェイトベクトル u_λ を固定する.

Definition 2.18. 各 $\lambda \in P_+$, $w \in W$ に対し, $u_{w\lambda} \in V(\lambda)$ を以下のように定義する:

$$u_{w\lambda} = f_{i_1}^{(\langle h_{i_1}, s_{i_2}\cdots s_{i_\ell}\lambda\rangle)} \cdots f_{i_{\ell-1}}^{(\langle h_{i_{\ell-1}}, s_{i_\ell}\lambda\rangle)} f_{i_\ell}^{(\langle h_{i_\ell}, \lambda\rangle)}.u_\lambda.$$

ここで, $(i_1, \ldots, i_\ell) \in I(w)$ とする. このとき, $u_{w\lambda}$ は w やその最短表示の取り方によらず $w\lambda$ にのみによって定まる [L4, Lemma 39.1.2].

以下はよく知られている.

Proposition 2.19. (1) 各 $\lambda \in P_+$ に対し, 以下を満たす $V(\lambda)$ 上の $\mathbb{Q}(q)$-双線型写像 $(\ ,\ )_\lambda \colon V(\lambda)\times V(\lambda) \to \mathbb{Q}(q)$ がただ一つ定まる:

$$(u_\lambda, u_\lambda)_\lambda = 1 \qquad (x.u_1, u_2)_\lambda = (u_1, \varphi(x).u_2)_\lambda,\ v_1, v_2 \in V(\lambda),\ x \in \mathbf{U}_q.$$

さらに, $(\ ,\ )_\lambda$ は対称非退化双線型形式である.
(2) 任意の $\lambda \in P_+$, $w \in W$ に対し, $(u_{w\lambda}, u_{w\lambda})_\lambda = 1$.

Definition 2.20 (冪単量子小行列式)**.** 各 $\lambda \in P_+$, $w_1, w_2 \in W$ に対し, $D_{w_1\lambda, w_2\lambda} \in \mathbf{U}_q^-$ を以下のように定める:

$$\text{任意の } x \in \mathbf{U}_q^- \text{ に対し}, (D_{w_1\lambda, w_2\lambda}, x)_L = (u_{w_1\lambda}, x.u_{w_2\lambda})_\lambda.$$

この形の元 $D_{w_1\lambda, w_2\lambda}$ は冪単量子小行列式と呼ばれる [Ki1, Section 6].

Proposition 2.21 ([Ka2, Proposition 4.1])**.** 0 でない冪単量子小行列式は双対標準基底の元である.

Example 2.22. 各 $k = 1, \ldots, \ell(w)$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$G^{\mathrm{up}}(b(m\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{i})) = F^{\mathrm{up}}(m\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{i}) = D_{ms_{i_1}\cdots s_{i_k}\varpi_{i_k}, ms_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}\varpi_{i_k}}$$

である [Ki1, Proposition 6.3]. Example 3.9 も参照せよ.

3 量子捻り写像 (quantum twist map)

3.1 主結果

Definition 3.1 (量子捻り写像 [LeY, Section 6.1])**.** 各 $w \in W$ に対し, 量子捻り写像 (quantum twist map) と呼ばれる $\mathbf{U}_q$ の $\mathbb{Q}(q)$-代数反同型 Θ_w が以下で定められる:

$$\Theta_w := T_w \circ S \circ \vee.$$

Lemma 2.9 と $(S \circ \vee)^2 = \mathrm{id}$ により, $(\Theta_w)^{-1} = \Theta_{w^{-1}} =: \Theta_w^*$ となることが容易にわかる. 各斉次元 $x \in \mathbf{U}_q$ に対し, $\mathrm{wt}\,(\Theta_w(x)) = -w\,\mathrm{wt}\,(x)$ となる.

Notation 3.2. (1) 各 $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_\ell) \in I\,(w)$ に対し, $\boldsymbol{i}^{\mathrm{rev}} := (i_\ell, \cdots, i_1) \in I\left(w^{-1}\right)$.
(2) 各 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$ に対し, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{rev}} := (c_\ell, \cdots, c_1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$.

量子捻り写像は (双対)Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底を保つことが確かめられる:

Proposition 3.3 ([KiO, Proposition 3.5]). 各 $w \in W$, $\boldsymbol{i} \in I\,(w)$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$ に対し,

$$\Theta_w^*\left(F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right)\right) = F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{rev}}, \boldsymbol{i}^{\mathrm{rev}}\right).$$

Proposition 3.3 により, Θ_w^* は $\mathbb{Q}(q)$-反代数同型 $\mathbf{U}_q^-(w) \to \mathbf{U}_q^-(w^{-1})$ を定めることがわかる. ここで, 以下が本稿の主結果の 1 つ目である.

Theorem 3.4 ([KiO, Theorem 3.7]). *Weyl* 群の元 $w \in W$ とその最短表示 $\boldsymbol{i} \in I(w)$ を取る. このとき各 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^{\ell(w)}$ に対し,

$$\Theta_w^*\left(G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right)\right)\right) = G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{rev}}, \boldsymbol{i}^{\mathrm{rev}}\right)\right).$$

特に, 量子捻り写像を $\Theta_w^* \colon \mathbf{U}_q^-(w) \to \mathbf{U}_q^-(w^{-1})$ と考えると, これは量子冪零部分代数の双対標準基底の間の全単射を導く.

Proposition 3.3 と Theorem 3.4 により以下が直ちに従う.

Corollary 3.5. 双対 *Poincaré-Birkhoff-Witt* 型基底を双対標準基底で展開した際の展開係数について以下が成立する:

$$\left[F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right) : G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i}\right)\right)\right] = \left[F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{rev}}, \boldsymbol{i}^{\mathrm{rev}}\right) : G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\left(\boldsymbol{c}'\right)^{\mathrm{rev}}, \boldsymbol{i}^{\mathrm{rev}}\right)\right)\right].$$

特に, 以下が成立する.

$$F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right) = G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right)\right) + \sum_{\boldsymbol{c}' < \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}' \prec \boldsymbol{c}} \left[F^{\mathrm{up}}\left(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{i}\right) : G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i}\right)\right)\right] G^{\mathrm{up}}\left(b\left(\boldsymbol{c}', \boldsymbol{i}\right)\right).$$

次に, 量子捻り写像と冪単量子小行列式との関係について述べる.

Proposition 3.6 ([KiO, Proposition 3.18]). *Weyl* 群の元 $w_1, w \in W$ を取り, w_1 は w 弱右 *Bruhat* 順序で小さい, すなわち, $\ell(w_1) + \ell(w_1^{-1}w) = \ell(w)$ とする. このとき各 $\lambda \in P_+$ と $w_2 \in W$ に対して $D_{w_1\lambda, w_2\lambda} \in \mathbf{U}_q^-(w)$ である.

Theorem 3.7 ([KiO, Theorem 3.20]). *Weyl* 群の元 $w_1, w_2, w \in W$ を取り, w_1, w_2 は弱右 *Bruhat* 順序で w より小さいとする. このとき各 $\lambda \in P_+$ に対し,

$$\Theta_w^*(D_{w_1\lambda, w_2\lambda}) = D_{w^{-1}w_2\lambda, w^{-1}w_1\lambda}.$$

Remark 3.8. Proposition 3.6 より, Theorem 3.7 の設定で $D_{w_1\lambda, w_2\lambda} \in \mathbf{U}_q^-(w)$, $D_{w^{-1}w_2\lambda, w^{-1}w_1\lambda} \in \mathbf{U}_q^-(w^{-1})$ である.

Example 3.9. Weyl 群の元 $w \in W$ と $\ell(s_iw) < \ell(w)$ なる $i \in I$ に対し,

$$\Theta_w^*(D_{s_i\varpi_i, \varpi_i}) = D_{w^{-1}\varpi_i, w^{-1}s_i\varpi_i}.$$

である. (Example 2.22 と比較せよ.)

Example 3.10. Theorem 3.7 において, w_1, w_2 は弱右 Bruhat 順序で w より小さいことを要請するが, w_1 と w_2 は弱右 Bruhat 順序で関係がなくてもよい. 例えば, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_4$, $w=s_3s_2s_1s_2=s_1s_3s_2s_1$ のとき, 各 $\lambda\in P_+$ に対し,

$$\Theta_w^*(D_{s_3s_2s_1\lambda,s_1\lambda})=D_{s_1s_2s_3\lambda,s_2\lambda}.$$

一方, w_2 が w_1 よりも弱右 Bruhat 順序で小さい場合には対応する $\mathscr{B}(\infty)$ の元の Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底によるパラメトライズを具体的に書くことができる [Ki1, Proposition 6.3]. この場合 Theorem 3.4 から Theorem 3.7 はすぐに確かめられる.

Example 3.11. Theorem 3.7 は弱右 Bruhat 順序に関する仮定がないと成立しない. 例えば, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$, $w=s_2s_1$ とし, $\rho:=\varpi_1+\varpi_2$ とおく. このとき s_1 と w は弱右 Bruhat 順序に関して比べられない. すると Proposition 3.6 によって $D_{s_2s_1\rho,s_1\rho}\in\mathbf{U}_q^-(s_2s_1)$ であるが, $D_{w^{-1}s_1\rho,w^{-1}s_2s_1\rho}=D_{-\rho,\rho}\notin\mathbf{U}_q^-(s_1s_2)$ であり, 特に $\Theta_w^*(D_{s_2s_1\rho,s_1\rho})\neq D_{-\rho,\rho}$ である.

最後に, $\mathbf{U}_q^-$ の部分代数 $\mathbf{U}_q^-\cap T_w(\mathbf{U}_q^-)$ 上の量子捻り写像に関して述べる.

Proposition 3.12 ([Ki2, Theorem 3.3]). 各 $w\in W$ に対し, $\mathbf{U}_q^-\cap T_w(\mathbf{U}_q^-)\cap\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ は $\mathbf{U}_q^-\cap T_w(\mathbf{U}_q^-)$ の基底をなす.

以下の定理は下の Proposition を用いて証明される.

Proposition 3.13 ([S, Proposition 3.4.7, Corollary 3.4.8], [L3, Theorem 1.2], [Ki1, Theorem 4.23]). 添え字 $i\in I$ を固定し, $\varepsilon_i^*(b)=0$ を満たす $b\in B(\infty)$ を取る. このとき,

$$T_i^{-1}G^{\mathrm{up}}(b)=G^{\mathrm{up}}(\sigma_ib)$$

である. ここで $\sigma_i\colon\{b\in B(\infty)\mid\varepsilon_i^*(b)=0\}\to\{b\in B(\infty)\mid\varepsilon_i(b)=0\}$ は以下で与えられる写像 (実際には全単射) である:

$$b\mapsto(\tilde{f}_i^*)^{\varphi_i(b)}\tilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)}b.$$

Theorem 3.14 ([KiO, Theorem 3.23]). 各 $G^{\mathrm{up}}(b)\in\mathbf{U}_q^-\cap T_w(\mathbf{U}_q^-)\cap\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ に対し,

$$\Theta_w^*(G^{\mathrm{up}}(b))=(-1)^{\mathrm{ht}(w^{-1}\,\mathrm{wt}\,b)}q^{\frac{1}{2}(\mathrm{wt}\,b,\mathrm{wt}\,b)+(\rho,w^{-1}\,\mathrm{wt}\,b)}t_{w^{-1}\,\mathrm{wt}\,b}G^{\mathrm{up}}(*\sigma_{i_\ell}\cdots\sigma_{i_1}b)^\vee.$$

ここで, $(i_1,\ldots,i_\ell)\in I(w)$, $\rho:=\sum_{i\in I}\varpi_i$, $t_{w^{-1}\,\mathrm{wt}\,b}:=\prod_{i\in I}t_i^{m_i}$ (ただし $w^{-1}\,\mathrm{wt}\,b=\sum_{i\in I}m_i\alpha_i$) とする.

3.2 証明の概略

Theorem 3.4 は Proposition 3.3 に加え, 以下を確かめる.

Proposition 3.15.

$$\Theta_w^*\circ\sigma\mid_{\mathbf{U}_q^-(w)}=\sigma\circ\Theta_w^*\mid_{\mathbf{U}_q^-(w)}.$$

これは, 各双対 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底の元ごとに計算すればよい. これを確かめた後は双対標準基底の特徴づけ (Remark 2.14) を用いる. Theorem 3.7 は Proposition 2.21 と Theorem 3.4 を考慮すると, 冪単量子小行列式の定義と組み紐作用の性質を用いて $\Theta_w^*(D_{w_1\lambda,w_2\lambda})$ が $D_{w^{-1}w_2\lambda,w^{-1}w_1\lambda}$ の定数倍になることさえ示せばよいことがわかる. これを見るためには以下の性質を用いる.

Lemma 3.16. 各 $x\in\mathbf{U}_q^-(w)$, $y\in\mathbf{U}_q^-(w^{-1})$ に対し,

$$(\Theta_w^*(x),y)_L=(x,\Theta_w(y))_L.$$

となる. (この性質により本稿では $\Theta_{w^{-1}}$ を Θ_w^* と書いた.)

4 今後の課題

以下に量子捻り写像に関して考えられる今後の課題を述べる.

- 1 節に述べた (e, w) に対応する二重 Bruhat 胞体における分解問題の q-類似を考えることができる. 1 節では双有理写像として x_i を用いたが, $\mathbb{C}[G^{e,w}]$ の元に対し $x_i(a; t_1, \ldots, t_\ell)$ を代入するという操作の q-類似は Feigin 写像と呼ばれるもので与えられる [B](厳密には Feigin 写像では H の部分は考察しないが). これと量子捻り写像を組み合わせることで, Theorem 1.6 の q-類似を考察せよという問がある (なお Theorem 1.6 の形の公式は Chamber Ansatz と呼ばれる). しかし上で扱った量子捻り写像はあくまで y-座標で見た場合のものであることに注意する必要がある. なお現時点では場合は限られているがこの方向では [BR] がある. また, 一般の二重 Bruhat 胞体 G^{w_1,w_2} に対する捻り写像 q-類似についても [GY2] では考察されている. しかしこの場合に Chamber Ansatz の q-類似を考えようとすると上の x_i の役割を果たす双有理写像の q-類似をどのように考えれるべきかが難しい.
- 量子冪零部分代数には量子団代数と呼ばれる代数の構造を持つことが [GLS], [GY1], [KKKO1, KKKO2] により知られている. 量子団代数は団単項式と呼ばれる特別な元を持ち, 様々な場合にこれらが双対標準基底の部分集合をなすことがわかってきている. 本稿では, 量子捻り写像が量子冪零部分代数の双対標準基底の間の全単射を引き起こすことを見たが, 一方で団単項式の間の全単射を保つかという問いが考えられる. これは具体的には, 量子捻り写像と量子団代数の変異との整合性を調べよという問である.
- 量子冪零部分代数の双対標準基底および量子団代数構造を調べる手段の一つとして, 圏化と呼ばれるものがある [GLS], [KKKO1, KKKO2]. これらの圏化において双対標準基底や団単項式は圏の "よい" 対象に対応するが, 一方量子捻り写像はそれらに対応する元を保つというのが本稿の結果である. このため, 量子捻り写像を圏化し, 圏のレベルでの "対称性" として理解することはできるかという問が考えられる. 例えば, [GLS] による前射影多元環のある表現の圏を用いた圏化では, 団単項式は $q = 1$ とした場合に準標準基底 (の部分集合) にも対応することがわかるが, では捻り写像が準標準基底の間の全単射も引き起こすかという点を考察するためには (量子) 捻り写像を前射影多元環の表現論の言葉に読み替える必要があるように思われる.

謝辞

2016 年度 RIMS 研究集会 "表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題" において講演の機会を与えて下さった青木茂様にこの場を借りて御礼申し上げます. また, 筆者の研究は特別研究員奨励費 (15J09231) および, 文部科学省博士課程教育リーディングプログラム (数物フロンティア・リーディング大学院 FMSP) の助成を受けたものです.

参考文献

[BCP] J. Beck, V. Chari, and A. Pressley, *An algebraic characterization of the affine canonical basis*, Duke Math. J. **99** (1999), no. 3, 455–487.

[B] A. Berenstein, *Group-like elements in quantum groups, and Feigin's conjecture*, arXiv preprint arXiv:q-alg/960501, 1996.

[BR] A. Berenstein and D. Rupel, *Quantum cluster characters of Hall algebras*, Selecta Math. (N.S.) **21**

(2015), no. 4, 1121–1176.

[FZ] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Double Bruhat cells and total positivity*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 2, 335–380.

[GLS] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, Sel. Math. New Ser. (2013), 337–397.

[GY1] K.Goodearl and M. Yakimov, *Quantum cluster algebra structures on quantum nilpotent algebras*, to appear in Memoirs Amer. Math. Soc.

[GY2] K. Goodearl and M. Yakimov, *The Berenstein-Zelevinsky quantum cluster algebra conjecture*, arXiv preprint arXiv:1602.00498, 2016.

[Ka1] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 465–516.

[Ka2] M. Kashiwara, *The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 839–858.

[Ka3] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 155–197.

[KKKO1] S-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S-j. Oh, *Monoidal categorification of cluster algebras*, arXiv preprint arXiv:1412.8106, 2014.

[KKKO2] S-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S-j. Oh, *Monoidal categorification of cluster algebras II*, arXiv preprint arXiv:1502.06714, 2015.

[Ki1] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, Kyoto J. Math. **52** (2012), no. 2, 277–331.

[Ki2] Y. Kimura, *Remarks on quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, arXiv preprint arXiv:1506.07912, 2015.

[KiO] Y. Kimura and H. Oya, *Quantum twist maps and dual canonical bases*, arXiv preprint arXiv:1604.07748, 2016.

[LeY] T. Lenagan and M. Yakimov, *Prime factors of quantum Schubert cell algebras and clusters for quantum Richardson varieties*, arXiv preprint arXiv:1503.06297, 2015.

[L1] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 447–498.

[L2] G. Lusztig, *Quivers, Perverse Sheaves, and Quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 2, 365-421.

[L3] G. Lusztig, *Braid group action and canonical bases*, Adv. Math. **122** (1996), no. 2, 237–261.

[L4] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Mod. Birkhäuser Class. New York, 2010, Reprint of the 1994 edition.

[S] Y. Saito, *PBW basis of quantized universal enveloping algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 2, 209–232.